ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO
(Anno 1896-97)

STUDII

DI

LOGICA MATEMATICA

Estr. dagli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXII.
Adunanza del 4 Aprile 1897.

NOTA

DEL SOCIO
GIUSEPPE PEANO

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1897

Da molti anni mi occupo di questi interessantissimi studii. Nel *Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva*, a. 1888, esposi sommariamente gli studii del signor Schröder, *Operationskreis der Logikkalkuls,* a. 1877, del Boole, e di altri autori. Feci ivi vedere l'identità del calcolo sulle classi, fatto da questi Autori, col calcolo sulle proposizioni, quale trovasi negli scritti di Peirce, Mc Coll, ecc.

Continuando queste ricerche, negli *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* a. 1889, fui fortunato di arrivare all'analisi completa delle idee di logica, riducendole ad un numero assai limitato, che espressi coi simboli: ϵ, $\supset$, $=$, $\cap$, $\cup$, $\sim$, Λ.

Risultato di questa analisi si fu la costruzione di una scrittura simbolica, od ideografia, atta a rappresentare tutte le idee di Logica; sicchè introducendo dei simboli per rappresentare le idee di altre scienze, si può esprimere ogni teoria simbolicamente (*). Per la prima volta, in questo opuscolo, fu espressa tutta una teoria in simboli; e mi servii appunto di questi onde distinguere ciò che si può da ciò che non si può definire, il dimostrabile dall'indimostrabile, in Aritmetica.

Adoperai lo stesso strumento analitico in altri lavori, quali:

Principii di Geometria, logicamente esposti, Torino, Bocca, a. 1889.

(*) Attualmente si possono esprimere con questa ideografia le proposizioni di Logica, e di alcune teorie matematiche, specialmente algebriche. Per tradurre in simboli altre teorie, occorre l'analisi completa delle idee che vi figurano, e la loro riduzione in simboli. Sicchè l'ideografia atta a rappresentare ad es. tutte le proposizioni di matematica è solo parzialmente fatta.

Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles (" Mathematische Annalen ", a. 1890, p. 182).

Sur la définition de la limite d'une fonction (" American Journal ", a. 1894), ecc.

Il Prof. BURALI-FORTI espose queste nuove teorie nella *Logica matematica* (Milano, Hoepli, a. 1894); e se ne servì in numerosi lavori, quali:

Sulle classi derivate a destra e a sinistra, Atti Accademia Torino, a. 1894.

Sul limite delle classi variabili, idem, a. 1895.

Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles, " Mathematische Annalen ", a. 1895, ecc.

Il Prof. PIERI adottò il medesimo strumento onde analizzare i principii della Geometria di Posizione, in una serie di lavori pubblicati da quest'Accademia.

Da alcuni anni una Società sta pubblicando il *Formulaire de Mathématiques,* la cui " Introduction " apparve nel 1894; e il primo tomo, cominciato nel 1892, terminò nel 1895. Questa pubblicazione deve contenere, espressi in simboli di logica, i teoremi, le definizioni e le dimostrazioni di differenti teorie matematiche.

Vi collaborarono i signori VAILATI, CASTELLANO, BURALI, GIUDICE, VIVANTI, BETTAZZI, FANO, oltre ad altri che inviarono aggiunte e correzioni. Ora è in corso di stampa il tomo II, ma molte difficoltà ne ritardano la pubblicazione.

Questa ideografia, che deriva dagli studii di logica matematica, non è solo una scrittura convenzionale abbreviata, o tachigrafia. Poichè i nostri simboli non rappresentano delle parole, ma delle idee. Si dovrà pertanto scrivere lo stesso simbolo, ove trovasi una stessa idea, qualunque sia l'espressione usata dal linguaggio ordinario per rappresentarla: e si dovranno usare simboli distinti, ove trovasi una stessa parola, che, a causa della sua posizione, rappresenta idee distinte. Noi stabiliamo adunque la corrispondenza univoca fra le idee ed i simboli, corrispondenza che non trovasi nelle nostre lingue. Questa ideografia è basata su teoremi di Logica, scoperti successivamente da LEIBNIZ fino ai nostri giorni. Si potrà cambiare la forma dei simboli,

cioè i pochi segni per rappresentare le idee fondamentali; ma non possono sussistere due ideografie differenti nella sostanza.

Ho menzionati alcuni lavori in cui si è fatto uso della ideografia, che dirò *mia* quantunque non possano sussistere due ideografie distinte, per la ragione che segue.

Il sig. G. FREGE, prof. all'Università di Jena, cui dobbiamo interessanti lavori di logica matematica, di cui il primo data dal 1879, è arrivato alla sua volta, e per via affatto indipendente (*), nel libro *Grundgesetze der Arithmetik,* a. 1893, ad esprimere in simboli una serie di proposizioni riguardanti il concetto di numero. Su questo libro pubblicai un breve cenno nella " Rivista di Matematica ", a. 1895, p. 122. Recentemente il medesimo Autore pubblicò una Nota: *Ueber die Begriffschrift des Herrn Peano und meine eigene* (" Bericht. d. math. Classe d. Gesellschaft zu Leipzig ", 6 Juli 1896), ove facendo puramente menzione del Formulario, e della sua Introduzione, dubita che la mia ideografia possa servire soltanto ad esprimere proposizioni; mentrechè nei lavori sopra riportati risulta evidente la sua importanza come mezzo di ragionamento.

Debbo lodare l'equanimità dei giudizii contenuti nello scritto del signor Frege; però, se noi siamo d'accordo in molti punti, le nostre opinioni diversificano ancora su varie questioni, il che proviene dal diverso significato che noi attribuiamo ad alcune parole e ad alcuni simboli.

Ma anche se si riguarda questa ideografia come una scrittura simbolica atta a rappresentare sotto forma breve e precisa tutte le proposizioni di matematica, ne è evidente la sua importanza. E questo criterio, del poter servire un simbolismo come linguaggio, serve a riconoscere se esso sia completo o no.

Fra le idee di Logica passano numerose relazioni, espresse da teoremi, o formule, di Logica. Pubblicai la raccolta delle *Formule di Logica matematica* nella " Rivista di matematica ",

(*) I lavori del Frege sono indipendenti da quelli dei numerosi scrittori di Logica matematica. Vedasi ad es. *Symbolic Logic* del VENN (London, 1894, p. 493). Non sono però in grado di pronunciare se l'ideografia del Frege sia o no completa; cioè se le sue proposizioni simboliche si possano leggere indipendentemente dal testo che le accompagna. Le formule del Frege sono, per me, di assai più difficile lettura che quelle degli altri autori.

a. 1891. Completata con nuove formule, e con numerose indicazioni storiche, dovute in gran parte al dottor Vailati, costituisce la parte I del *Formulaire,* t. I. Numerose aggiunte furono indicate da varii corrispondenti; ed una nuova edizione si fa sempre più desiderare. Molte di queste formule hanno la forma di eguaglianze, nelle quali in un membro trovasi un segno che non trovasi nell'altro membro, ovvero trovasi in questo in posizione diversa. Siffatte eguaglianze permettono di esprimere quel segno mediante gli altri; cioè si possono assumere come definizione di quel segno. Così, con definizioni opportune, si può ridurre le idee di logica ad un numero sempre più piccolo di idee fondamentali, o idee primitive, che debbono essere espresse col linguaggio ordinario, e schiarite con esempi, ma che non si possono esprimere simbolicamente mediante altre più semplici. Ma questa riduzione delle idee di logica alle fondamentali presenta serie difficoltà; ed è più facile il riconoscere quante e quali siano le idee primitive in Aritmetica e in Geometria, che in Logica.

In questa Nota tratto della riduzione delle idee di logica al minimo numero. Ammesso il significato di alcuni simboli, spiegati col linguaggio comune, tutte le altre proposizioni saranno scritte interamente in simboli, senza nulla lasciare sottinteso, o da spiegarsi in parole. Sicchè le formule sole formano da sè un testo intelligibile. Ma schiarimenti ed osservazioni intercalate, in linguaggio ordinario, ne faciliteranno l'intelligenza.

Idee primitive.

Le convenzioni che seguono, e che dobbiamo spiegare col linguaggio ordinario, rappresentano idee primitive:

1. Le lettere $a, b, \ldots x, y, z$ indicano oggetti qualunque, variabili col cambiare della proposizione.

2. Si divide una formula in parti, mediante le parentesi, ovvero coi punti. Sicchè le formule:

$$ab.c, \quad a.bc, \quad ab.cd, \quad ab.cd:e.fg$$

sono equivalenti a

$$(ab)c, \quad a(bc), \quad (ab)(cd), \quad [(ab)(cd)][e(fg)]$$

3. K significa " classe ".
4. Sia a una K; $x \epsilon a$ significa " x è un a ".
5. Siano p e q delle proposizioni contenenti lettere variabili $x, \ldots z$. La formula

$$p \; \supset_{x, \ldots z} \; q$$

significa " qualunque si siano $x, \ldots z$, purchè soddisfino alla condizione p, esse soddisferanno alla condizione q ". Gli indici al segno $\supset$ si sottintendono quando non siavi pericolo di ambiguità.

6. pq indica l'affermazione simultanea delle proposizioni p e q.

La 1ª convenzione, sulle lettere variabili, ci è famigliare dall'Algebra e dalla Geometria. Essa fu già usata in Logica da Aristotele. Però è necessario di enunciarla, come pure quella sulle parentesi, volendo numerare tutte le convenzioni di cui facciamo uso.

Le idee rappresentate dai nostri simboli sono idee semplicissime, e non hanno l'esatto valore dei corrispondenti termini del linguaggio ordinario, i quali rappresentano idee più complesse. Così il segno ϵ si può leggere " è un " o latinamente " est "; ma rappresenta l'idea che si ha dal termine " est ", ove si faccia astrazione dal modo, tempo e persona. Quindi non essendovi corrispondenza esatta fra i simboli e i termini del linguaggio ordinario, l'esatto valore dei simboli si impara meglio, e facilmente, da esempi.

Per dar esempi presi dall'Aritmetica faremo uso dei simboli:

N	invece di " numero (intero e positivo) "
Np	" " numero primo "
$N \times a$	" " multiplo di a ".

Esempi:

$$7 \epsilon Np, \quad 12 \epsilon N \times 4,$$

$$a \epsilon N \, . \supset . \, a(a+1)(a+2) \epsilon N \times 6$$

" Sia a un numero; il prodotto $a(a+1)(a+2)$ è multiplo di 6 ".

$$a \epsilon \mathrm{Np} \,.\, \supset .\, (a-1)! + 1 \epsilon \mathrm{N} \times a.$$

" Essendo a un numero primo, l'espressione scritta è un multiplo di a (WILSON) ".

Il segno $\supset$ porta qui come indice sottinteso la lettera a. Queste proposizioni constano di tre parti, ipotesi, segno di deduzione e tesi.

$$x \epsilon \mathrm{N} \,.\, x < 17 \,.\, \supset .\, x^2 - x + 17 \epsilon \mathrm{Np}.$$

" Qualunque si sia l'intero x, minore di 17, sempre l'espressione $x^2 - x + 17$ rappresenta un numero primo (LE GENDRE) ".

$$a \epsilon \mathrm{Np} \,.\, b \epsilon \mathrm{N} \,.\, b^2 \epsilon \mathrm{N} \times a \,.\, \supset .\, b \epsilon \mathrm{N} \times a.$$

" Se il quadrato del numero b è multiplo del numero primo a, sarà anche b multiplo di a " (EUCLIDE).

Qui l'ipotesi è l'affermazione simultanea di più proposizioni. Il segno $\supset$ porta come indici sottintesi le lettere a e b.

Daremo un esempio, in cui l'ipotesi già contiene il segno di deduzione (i nuovi segni di aritmetica che vi figurano, sono subito spiegati):

$$a \epsilon \mathrm{N} : x \epsilon \mathrm{Np} \,.\, \supset_x .\, \mathrm{mp}(x, a) \epsilon \mathrm{N}_0 \times 2 : \supset .\, a \epsilon \mathrm{N}^2$$

" Se a è un numero; e se qualunque si sia il numero primo x, l'esponente della massima potenza di x che divide a è un numero pari, lo zero compreso, allora a è un quadrato perfetto ".

Il retto uso del segno $\supset$ è intimamente collegato con quello delle lettere variabili. Poichè secondo le nostre convenzioni le lettere $a, b, \ldots$ rappresentano enti variabili qualunque, in ogni proposizione si deve cominciare a dire che specie di enti essi rappresentano. Quindi la proposizione:

$$a \times b = b \times a$$

per noi non ha senso, perchè incompleta. Ci si dovrà premettere il significato delle lettere a e b; e scrivere p. e.:

$$a \epsilon \mathrm{N} . b \epsilon \mathrm{N} . \supset . a \times b = b \times a.$$

Invece di supporre a e b degli interi, si ponno supporre fratti, irrazionali, immaginarii, e la tesi continuerà a sussistere; ma essa sarà falsa, se a e b sono quaternioni non complanari; e sarà priva di senso, se a e b sono enti, su cui non sia stata definita la moltiplicazione.

Dicesi che, in una formula, una lettera variabile è apparente, se il valore di quella formula è indipendente dalla lettera variabile. Così in $\int_a^b f(x)\,dx$, la lettera x è apparente.

In ogni proposizione le lettere che figurano, espresse o sottintese, al segno $\supset$, sono apparenti. Così la

$$x \epsilon \mathrm{Np} . \supset_x . \mathrm{mp}\,(x, a) \epsilon \mathrm{N}_0 \times 2$$

" qualunque si sia il numero primo x, la massima potenza di x contenuta in a è pari ", è una proposizione che esprime una condizione nella lettera a, e non nella x che si può sostituire con y, senza cambiare la condizione.

Tutte le lettere che figurano in un teorema, sono apparenti, poichè il teorema esprime una verità indipendente dalle lettere usate.

Mi sono arrestato lungamente sul segno $\supset$, e sugli indici relativi, perchè havvi divergenza fra l'uso che il signor Frege ed io facciamo dei miei simboli.

Invero il segno $\supset$ è da noi essenzialmente posto fra proposizioni contenenti lettere variabili.

Invece il signor Frege porta come esempi del segno $\supset$ le proposizioni:

$$2^2 = 4 . \supset . 3 + 7 = 10$$

$$2 > 3 . \supset . 7^2 = 0,$$

ove il segno $\supset$ trovasi fra proposizioni non contenenti lettere variabili.

Analogamente l'esempio del signor Frege:

$$x > 2 . \supset . x^2 > 2$$

non è, secondo me, completo; poichè quando si introduce una lettera x, si deve cominciare a dire che cosa rappresenta. Si potrà completare, scrivendo ad es.:

$$x \epsilon \mathrm{N} . x > 2 . \supset . x^2 > 2.$$

Il signor Frege considera delle espressioni della forma:

$$(\Phi(x) \supset_x \Psi(x, y)) \supset_y \mathrm{X}(y)$$

le quali parimenti non si incontrano nel Formulario, perchè in una deduzione può avvenire che l'ipotesi contenga lettere che non figurano nella tesi; ma non avviene mai che figurino nella tesi delle lettere che non si trovano nell'ipotesi. Parimenti non trovasi nel Formulario l'esempio $(2 > 3) = \Lambda$ del signor Frege.

Idee derivate

(Definizioni.)

Combinando le notazioni primitive ora introdotte, possiamo comporre idee derivate, suscettibili di definizione simbolica. Per definizione simbolica d'un nuovo segno x si intende la convenzione di chiamare x un gruppo di segni avente significato già noto; e la indicheremo con

$$x = a \qquad \text{Def.}$$

Se ciò che si definisce, x, contiene lettere variabili, e se è necessario di limitare il significato di queste lettere mediante un'ipotesi, la definizione assume la forma

$$\text{Ipotesi} \; . \supset . \, x = a \qquad \text{Def.}$$

I due segni = Def, quantunque scritti staccati, si devono considerare come un simbolo solo; che si legge " è eguale, per definizione ", ovvero " chiamiamo ".

Sia a una K; spesso si ha da scrivere la proposizione " x ed y sono degli a "; noi conveniamo di indicarla simbolicamente con $x, y \epsilon a$. E siccome questa proposizione vale l'affermazione delle due $x \epsilon a . y \epsilon a$, così porremo per definizione:

1. $$a \epsilon \mathrm{K} . \supset : x, y \epsilon a . = . x \epsilon a . y \epsilon a \qquad \text{Def.}$$

Risulta chiaro in questo esempio il carattere comune delle definizioni, di essere abbreviazioni; chi non vuole adottare questa definizione, potrà scrivere dovunque $x \epsilon a \,.\, y \epsilon a$ al posto di $x, y \epsilon a$; le ideografie che risulterebbero adottando ovvero non adottando questa definizione non sarebbero punto in sostanza distinte. Però questa definizione reca effettivamente un'utile abbreviazione, e quindi conviene sia adottata.

La $x, y, z \epsilon a$ significa $x, y \epsilon a \,.\, z \epsilon a$, cioè $x \epsilon a \,.\, y \epsilon a \,.\, z \epsilon a$.

Siano a e b delle K. Scriveremo $a \supset b$ al posto di " ogni a è b „; e possiamo definire simbolicamente questa scrittura come segue:

2. $a, b \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset \,.\!\cdot\, a \supset b \,.=:\, x \epsilon a \,.\, \supset_x .\, x \epsilon b.$ Def.

Nella formula $x \epsilon a \,.\, \supset_x .\, x \epsilon b$, " se x è un a, sarà pure x un b „, la lettera x che figura come indice al segno $\supset$ è una lettera *apparente*, cioè il valore di essa proposizione non dipende da x; perciò essa esprime una relazione fra le lettere a e b, che noi conveniamo di indicare con $a \supset b$, ove la lettera apparente x è soppressa.

Il segno $\supset$ fra classi si può leggere " è contenuto „, mentre fra proposizioni si leggeva " si deduce „. Il fatto che esso si può leggere in più modi non prova che esso abbia più significati; ma solo che il linguaggio ordinario ha più termini per rappresentare la stessa idea. Il termine che meglio corrisponderebbe al segno $\supset$ nelle sue varie posizioni potrebbe essere " quindi „ " ergo „.

Esempio:

$$\mathrm{N} \times 6 \supset \mathrm{N} \times 2$$

" ogni multiplo di 6 è un multiplo di 2 „

ovvero " multiplo di 6, dunque multiplo di 2 „

è un'applicazione della definizione 2. Se non si vuol fare uso di questa definizione, la stessa proposizione si scriverà:

$$x \epsilon \mathrm{N} \times 6 \,.\, \supset .\, x \epsilon \mathrm{N} \times 2.$$

" Se x è un multiplo di 6, allora x sarà un multiplo di 2 „. Il segno $\supset$ porta qui l'indice x sottinteso.

Sia a una K; scrivendo avanti il segno $\overline{x\epsilon}$ si ha la proposizione $x\epsilon a$, contenente la lettera variabile x.

Viceversa, essendo p_x una proposizione contenente la lettera variabile x, con $\overline{x\epsilon} p_x$ intenderemo la classe degli x che soddisfano alla condizione p_x. Sicchè, detta a questa classe, cioè posto

$$a = \overline{x\epsilon} p_x,$$

la proposizione p_x sarà equivalente alla $x\epsilon a$

$$x\epsilon a . = . p_x .$$

Il segno $\overline{}$ scritto su $x\epsilon$ è il segno d'inversione, poichè questa convenzione è caso particolare di un'altra sulle funzioni. Tutto il segno $\overline{x\epsilon}$ si può leggere " gli x i quali „. Nell'espressione $\overline{x\epsilon} p_x$, la lettera x è apparente.

Volendosi esprimere in simboli questa proposizione, siccome noi non abbiamo formato dei simboli per dire " sia p_x una proposizione contenente la lettera variabile x „, ci occorrerà supporre la proposizione p_x ridotta alla forma $x\epsilon a$, ove a è una K; quindi porremo:

3. $\quad a\epsilon \mathrm{K} . \supset . \overline{x\epsilon}(x\epsilon a) = a \quad$ Def.

" Sia a una classe; allora il segno $\overline{x\epsilon}$ messo davanti alla proposizione $x\epsilon a$, dà di nuovo la classe a „. E questa definizione esprime effettivamente il primo membro non avente ancor significato, mediante il secondo. Però apparentemente essa sostituisce una notazione lunga ad una corta. E ciò avviene, perchè la proposizione contenente x s'è scritta sotto la forma $x\epsilon a$. Ma se essa è scritta sotto altra forma, la definizione precedente arreca una vera semplificazione.

Siano a e b delle K. Con $a \cap b$, ovvero semplicemente ab si indica la classe degli enti che sono ad un tempo a e b. Il segno $\cap$ corrisponde all'incirca alla congiunzione *e*; l'operazione che esso rappresenta dicesi anche *moltiplicazione logica*.

Questa operazione si può definire

4. $\quad a, b\epsilon \mathrm{K} . \supset . ab = \overline{x\epsilon}(x\epsilon a . x\epsilon b) \quad$ Def.

" Essendo a e b delle classi, con ab si intende l'insieme degli x che soddisfano alla condizione $x \epsilon a \,.\, x \epsilon b$ „.

Operando col segno $x\epsilon$ in ambi i membri di questa eguaglianza, si ha:

$$a, b \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset : x \epsilon ab \,.=.\, x \epsilon a \,.\, x \epsilon b$$

" Dire che x è un ab vale dire che x è un a, e che x è un b „; però questa eguaglianza non potrebbe servire come definizione del simbolo ab, ma solo di tutta la scrittura $x \epsilon ab$.

Così è definita la moltiplicazione logica delle classi mediante l'affermazione simultanea, o moltiplicazione logica delle proposizioni, che si è assunta come idea primitiva, e mediante il segno $x\epsilon$ che è stato definito (Def. 3). Però non mi riesce esprimere il segno ab senza far uso della def. 3.

Esempio:

$$\mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N} + 1) \supset \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2$$

" Ogni numero primo della forma $4x + 1$, ove x è un N, è la somma di due quadrati „. Non volendo fare uso delle definizioni introdotte, ma solo delle idee primitive, questa proposizione si scriverà

$$x \epsilon \mathrm{Np} \,.\, x \epsilon 4\mathrm{N} + 1 \,.\, \supset .\, x \epsilon \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2$$

Porremo la seguente def.

$$5. \qquad a, b \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset : a = b \,.=.\, a \supset b \,.\, b \supset a \qquad \mathrm{Def.}$$

" Siano a e b delle classi; diremo che $a = b$ quando ogni a è b, e ogni b è a „. In questa definizione trovasi, nel primo membro il segno $=$ fra classi, segno che si vuol definire; nel secondo membro una scrittura non contenente questo segno. I due membri sono collegati col segno $=$; ma questo si deve considerare unito al segno Def, sicchè tutto il segno $=$ Def si deve considerare come un segno solo. Sicchè è solo apparente il circolo vizioso di definire il segno $=$ facendo uso del segno stesso.

Meritano menzione le seguenti proposizioni:

$$a, b, c \in \mathrm{K} \,.\, \supset .\, aa = a$$
$$ab = ba$$
$$a(bc) = (ab)c,$$

già enunciate a parole da Leibniz (Opera philosophica, p. 98), e in simboli dal Boole, a. 1854, p. 29, 31, a meno del significato delle lettere, che doveva ancora essere espresso col linguaggio ordinario.

Esempio:

$$(\mathrm{N} \times 2) \frown (\mathrm{N} \times 3) = (\mathrm{N} \times 6)$$

Il segno Λ, fra classi, indica la classe nulla, cioè non contenente alcun individuo. Si può definire come segue:

6. $a \in \mathrm{K} \,.\, \supset .\!\cdot\, a = \Lambda \,.\, = : b \in \mathrm{K} \,.\, \supset_b .\, a \supset b$ Def.

" Sia a una classe; diremo che la classe a è nulla, se, comunque si prenda la classe b, la a è contenuta in b ".

La proposizione $b \in \mathrm{K} \,.\, \supset_b .\, a \supset b$ contiene la lettera apparente b; quindi è una condizione nella sola a; sicchè possiamo convenire d'indicarla con la scrittura $a = \Lambda$, ove figura la sola lettera a.

Si badi che ciò che si è definito è la sola proposizione $a = \Lambda$; quindi per ora il complesso di segni $= \Lambda$ si deve considerare come un segno solo. Però questa notazione è vantaggiosa, poichè questa condizione $a = \Lambda$ si comporta come un'eguaglianza; vale a dire si possono dimostrare le proposizioni:

$$a, b \in \mathrm{K} \,.\, a = \Lambda \,.\, b = \Lambda \,.\, \supset .\, a = b.$$
$$\text{''} \quad .\, a = b \,.\, b = \Lambda \,.\, \supset .\, a = \Lambda.$$

Ma il segno Λ non è per ora definito, cioè non si può ancora formare una eguaglianza il cui primo membro sia Λ, e il cui secondo sia un gruppo di segni noti.

Analogamente al segno Λ, si può introdurre il segno V (tutto):

7. $a \in \mathrm{K} \,.\, \supset .\!\cdot\, a = \mathrm{V} \,.\, = : b \supset \mathrm{K} \,.\, \supset_b .\, b \supset a.$

Ma questo segno V ha nessuna utilità pratica, e non trovasi mai nel Formulario.

Esempio:

$$N^3 \frown (N^3 + N^3) = \Lambda$$

" numeri cubi, somme di due cubi, non esistono ". Volendosi esprimere questa proposizione senza far uso delle definizioni, ma colle sole idee primitive, essa diventa:

$$x \epsilon N^3 . x \epsilon N^3 + N^3 . a \epsilon K . \supset . x \epsilon a.$$

Siano a e b delle classi; $a \cup b$ indica la più piccola classe contenente a e b. Il segno $\cup$ si legge *o*; l'operazione indicata da questo segno dicesi addizione logica.

Questo segno si può definire coi simboli precedenti, come segue:

8. $a, b \epsilon K . \supset . a \cup b = \bar{x} \epsilon (c \epsilon K . a \supset c . b \supset c . \supset_c . x \epsilon c)$. Def.

" Avendo a e b il detto significato, $a \cup b$ indica l'insieme degli individui appartenenti ad ogni classe c che contenga le due classi a e b ".

Si ha:

$$a, b, c \epsilon K . a \supset c . b \supset c . \supset . a \cup b \supset c \quad \text{[Leibniz, pag. 96]}$$

$$. \supset . a(b \cup c) = ab \cup ac$$

Questa esprime la proprietà distributiva della moltiplicazione logica rispetto all'addizione; proprietà enunciata dal Lambert nel 1781.

Esempio:

$$Np \frown (3 + N) \supset (6N - 1) \cup (6N + 1)$$

Questa proposizione si esprime senza far uso della def. 8 in questo modo:

$$x \epsilon Np . x > 3 . a \epsilon K . 6N - 1 \supset a . 6N + 1 \supset a . \supset . x \epsilon a.$$

Essendo a una classe, con $\sim a$ si intende la classe dei non a, che si può definire come segue:

9. $a \epsilon \mathrm{K} . \supset . \sim a = \overline{x \epsilon} (b \epsilon \mathrm{K} . a \cup b = \mathrm{V} . \supset_b . x \epsilon b)$ Def.

" Con $\sim a$ intendiamo l'insieme degli x appartenenti ad ogni classe b tale che con a dia per somma il tutto ".

Così la negazione è espressa mediante il segno $\cup$ e il V. Fra le tante identità che si hanno, menzionerò le due

$$a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset . \sim (a \cup b) = (\sim a) \cap (\sim b)$$
$$\sim (a \cap b) = (\sim a) \cup (\sim b),$$

espresse in simboli (a meno del significato delle lettere) da De Morgan nel 1858.

Dalla prima si ricava

$$a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset . a \cup b = \sim [(\sim a) \cap (\sim b)],$$

la quale potrebbe servire come definizione del segno $\cup$ mediante i segni $\sim$ ed $\cap$; così effettivamente si era fatto nel Formulario; ma l'attuale scelta porta ad una riduzione ulteriore.

I segni $\supset$ ed $\cap$ si possono trovare fra proposizioni, ovvero fra classi, e si è dedotto il secondo significato dal primo, colle definizioni 2 e 4. I segni $=$, Λ, $\cup$, $\sim$ definiti fra classi, compaiono pure fra proposizioni, e saranno definiti come segue:

10. $a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset \therefore x \epsilon a . =_x . x \epsilon b : = : x \epsilon a . \supset_x . x \epsilon b : x \epsilon b . \supset_x . x \epsilon a$ Def.

ovvero " " $= . a = b$

" Diremo che le due proposizioni condizionali in x, $x \epsilon a$ ed $x \epsilon b$, sono, rispetto ad x equivalenti, se dalla prima si deduce la seconda, e viceversa; o ciò che fa lo stesso, se le classi a e b sono eguali ".

I segni $\supset$ ed $=$ hanno un'altra posizione, che spesso si presenta, e che definiremo come segue:

11. $a, b, c \epsilon \mathrm{K} . \supset :: x \epsilon a . \supset_x : x \epsilon b . \supset . x \epsilon c . \therefore = : x \epsilon a . x \epsilon b . \supset_x . x \epsilon c .$

ovvero

„ „ $= . ab \supset c$ Def.

“ Essendo a, b, c delle classi, diremo che da $x \epsilon a$ si deduce rispetto ad x, che da $x \epsilon b$ si deduce $x \epsilon c$, quando da $x \epsilon a$ e da $x \epsilon b$ si deduce $x \epsilon c$; cioè quando la classe ab è contenuta in c „.

12. $a, b, c \epsilon \mathrm{K} . \supset :: x \epsilon a . \supset_x : x \epsilon b . = . x \epsilon c .\because . = . ab \supset c . ac \supset b$ Def.

“ E diremo che se $x \epsilon a$, la condizione $x \epsilon b$ è equivalente alla $x \epsilon c$, quando, nell'ipotesi $x \epsilon a$, da $x \epsilon b$ si deduce $x \epsilon c$ e viceversa, cioè quando $ab \supset c$, e $ac \supset b$ „.

13. $a \epsilon \mathrm{K} . \supset \therefore x \epsilon a . =_x \Lambda : = . a = \Lambda$ Def.

“ Sia a una classe; diremo che la proposizione $x \epsilon a$ è rispetto alla variabile x assurda, e si scrive come nella formula, quando la classe a è nulla.

14. $a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset : x \epsilon a . \cup . x \epsilon b . = . x \epsilon a \cup b$ Def.

“ Scriviamo $x \epsilon a . \cup . x \epsilon b$, che leggiamo x è un a, o x è un b, invece di x è un a o b „.

15. $a \epsilon \mathrm{K} . \supset : \sim (x \epsilon a) . = . x \epsilon \sim a$. Def.

che esprime la negazione d'una proposizione mediante quella d'una classe.

Queste definizioni hanno il primo membro più complicato del secondo, il che dipende dall'aver espresse le proposizioni su cui operiamo sotto la forma $x \epsilon a$.

Per sopprimere delle parentesi, spesso si scrive il segno $\sim$ davanti al segno di relazione, cioè

16. $a \epsilon \mathrm{K} . \supset : x \sim \epsilon a . = . \sim (x \epsilon a)$ Def.

17. $x \sim = y . = . \sim (x = y)$ Def.

Affinchè alcune definizioni precedenti possano ricevere tutta la generalizzazione che occorre nelle nostre formule, è necessario introdurre l'idea della coppia.

$(x;y)$ indica la coppia formata dagli oggetti x ed y.

Questa coppia è considerata come un nuovo oggetto. Nel Formulario, invece di $(x;y)$ si è scritto semplicemente (x,y), non essendovi, in pratica, pericolo di ambiguità colla definizione 1ª.

L'idea di coppia è fondamentale, cioè noi non la sappiamo esprimere mediante i simboli precedenti. Però possiamo definire l'eguaglianza di due coppie:

18. $$(x;y)=(a;b) .=. x=a . y=b$$ Def.

" la coppia $(x;y)$ dicesi eguale alla $(a;b)$, quando i loro elementi sono ordinatamente eguali ".

Coll'idea di coppia possiamo esprimere alcune importanti regole di ragionamento, che già esposi, col linguaggio comune, in miei lavori; ma che ora possiamo esprimere completameute in simboli. Eccone una:

$$a,b,c \epsilon \mathrm{K} : x \epsilon a . (x;y) \epsilon b . \supset_{x,y} . (x;y) \epsilon c : \supset .\cdot . x \epsilon a . \supset_x : (x;y) \epsilon b . \supset_y . (x;y) \epsilon c.$$

" Siano a, b, c delle classi. Suppongasi che qualunque siano x ed y, se x appartiene alla classe a, e se la coppia $(x;y)$ appartiene alla classe b, allora questa coppia appartenga alla classe c. Allora qualunque sia x, purchè sia un a, si deduce, che qualunque sia y, purchè la coppia $(x;y)$ soddisfi alla condizione b, la coppia $(x;y)$ soddisferà alla condizione c ".

Questa regola di ragionamento dicesi " esportare " o " separare le ipotesi ". Sussiste pure la proposizione inversa.

Esempio:

$$a \epsilon \mathrm{N} . b \epsilon \mathrm{N} \times a . c \epsilon \mathrm{N} \times b . \supset . c \epsilon \mathrm{N} \times a.$$

Qui il segno $\supset$ porta sottintesi gli indici a, b, c. Esportando le ipotesi relative ad a e b, si ha:

$$a \epsilon \mathrm{N} . b \epsilon \mathrm{N} \times a . \supset : c \epsilon \mathrm{N} \times b . \supset_c . c \epsilon \mathrm{N} \times a.$$

Il primo segno $\supset$ porta sottintesi gli indici a e b; il secondo l'indice scritto c. E per la def. 2, si può pure scrivere:

$$a \epsilon \mathrm{N} . b \epsilon \mathrm{N} \times a . \supset . \mathrm{N} \times b \supset \mathrm{N} \times a.$$

La terna $(x;y;z)$ si può considerare come la coppia formata di $(x;y)$ e di z.

Le definizioni 10-15 esprimevano operazioni su proposizioni della forma $x \epsilon a$, cioè proposizioni contenenti una sola lettera variabile x. Ma noi possiamo supporre che x rappresenti una coppia, una terna, cioè un sistema qualunque di lettere; quindi, col concetto di coppia, quelle definizioni esprimono operazioni su proposizioni condizionali qualunque.

La proposizione $a \sim = \Lambda$, ove a è una classe, significa pertanto " gli a esistono ". Siccome questa relazione si presenta assai spesso, alcuni collaboratori ritengono utile indicarla con una notazione sola, invece del gruppo $\sim = \Lambda$. Chi è di tale opinione potrà porre per es.

19. $$a \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset : \exists a \,.=.\, a \sim = \Lambda$$ Def.

Esempio:

$$\exists \mathrm{N}^2 \frown (\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2)$$

" esistono quadrati somme di due quadrati ".

Il segno $=$ si è già definito fra due classi, fra due proposizioni, fra due coppie; e nelle scienze matematiche si definisce sempre nuove volte, quando esso si trova fra enti nuovamente introdotti.

Si può dare la definizione generale:

20. $$x = y \,.=:\, a \epsilon \mathrm{K} \,.\, x \epsilon a \,.\supset_a .\, y \epsilon a \,.$$ Def.

" Diremo che l'ente x è eguale all'ente y, quando ogni classe a contenente x contiene pure y ".

Ma resta a far vedere come le varie definizioni particolari entrino in questa.

Essendo x un oggetto qualunque, con ιx si intende la classe formata di questo solo oggetto:

21. $$\iota x = \overline{y \epsilon} (y = x)$$ Def.

" con ιx si intende l'insieme degli y che soddisfano alla condizione $y = x$ ".

Si hanno le eguaglianze

$$a \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset : x \epsilon a \,.\, = .\, \iota x \supset a$$
$$\text{„} \quad x \epsilon \sim a \,.\, = .\, \iota x \cap a = \Lambda$$
$$\text{„} \quad x, y \epsilon a \,.\, = .\, \iota x \cup \iota y \supset a$$

che esprimono le proposizioni $x \epsilon a$ ed $x \epsilon \sim a$, mediante altre in cui non trovansi i segni ϵ, $\sim$.

Viceversa, sia a una classe contenente un solo individuo, cioè: esistano degli a, e comunque si prendano due individui x ed y di a, essi siano sempre eguali. Questo individuo lo indicheremo con $\bar{\iota} a$. Sicchè

22. $a \epsilon \mathrm{K} \,.\, \exists a : x, y \epsilon a \,.\, \supset_{x,y} .\, x = y : \supset : x = \bar{\iota} a \,.\, = .\, a = \iota x$ Def.

Veramente questa definizione dà il significato di tutta la formula $x = \bar{\iota} a$, e non del solo gruppo $\bar{\iota} a$. Ma ogni proposizione contenente $\bar{\iota} a$ è riduttibile alla forma $\bar{\iota} a \epsilon b$, ove b è una classe; e questa ad $a \supset b$, ove è scomparso il segno $\bar{\iota}$; quantunque non ci riesca formare un'eguaglianza il cui primo membro sia $\bar{\iota} a$, ed il secondo un gruppo di segni noti.

Esempio:

$$a, b \epsilon \mathrm{N} \,.\, a < b \,.\, \supset .\, b - a = \bar{\iota} \mathrm{N} \cap \overline{x \epsilon} (a + x = b)$$

" Essendo a e b degli N, e $a < b$, $b - a$ indica quel numero x tale che aggiunto ad a dà b „.

La def. 6 ci dà il significato di tutto il simbolo $= \Lambda$; si può definire il simbolo Λ:

$$\Lambda = \bar{\iota} \mathrm{K} \cap \overline{a \epsilon} (b \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset_b .\, a \supset b)$$

ovvero

$$\Lambda = \bar{\iota} \, \overline{x \epsilon} (a \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset_a .\, a \sim a = x)$$

" nulla è il valor comune dell'espressione $a \sim a$, qualunque sia la classe a „.

Si ha pure

$$a \epsilon \mathrm{K} \,.\, \supset .\, \sim a = \bar{\iota} \mathrm{K} \cap \overline{x \epsilon} [a \cap x = \Lambda \,.\, a \cup x = \mathrm{V}]$$

" essendo a una classe, $\sim a$ indica quella classe x tale che moltiplicata per a dà il nulla, e sommata con a dà il tutto „.

Questa è la definizione della negazione di a, data dal sig. Schröder, nella " Algebra der Logik ", a. 1891, p. 32, parte in simboli e parte a parole.

Daremo ancora la definizione di corrispondenza (f).

23. $$a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset .\because. f \epsilon b\mathrm{f}a . = : x \epsilon a . \supset_x . fx \epsilon b.$$

" Siano a e b delle classi; diremo che f è una corrispondenza fra gli a ed i b, se scrivendo il segno f avanti ad un individuo qualunque della classe a, si ottiene un b ".

Si può definire la corrispondenza simile:

24. $$a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset .\because. f \epsilon (b\mathrm{f}a)\mathrm{Sim} . = : f \epsilon b\mathrm{f}a : x, y \epsilon a . x \sim= y . \supset_{x,y} . fx \sim= fy$$

la corrispondenza reciproca:

25. $$a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset .\because. f \epsilon (b\mathrm{f}a)\mathrm{rcp} . = : f \epsilon (b\mathrm{f}a)\mathrm{Sim} : y \epsilon b . \supset_y . \exists\, \overline{x} \epsilon (x \epsilon a . fx = y)$$

e infine il numero:

26. $$a, b \epsilon \mathrm{K} . \supset : \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, b . = . \exists\, (b\mathrm{f}a)\mathrm{rcp}$$

" Diremo che il numero degli a è eguale al numero dei b, se esiste una corrispondenza reciproca fra gli a e i b ".

Adunque, ammessi alcuni simboli spiegati col linguaggio ordinario, e rappresentanti idee che chiamo primitive, si è potuto dare la definizione simbolica di tutti i segni che si incontrano in logica matematica.

Ma io ritengo che in questo campo siavi ancor molto a fare. Si può cercare di ridurre ulteriormente il numero delle idee ritenute primitive, ovvero tentare altre vie, assumendo come idee primitive un altro gruppo di idee in modo da ottenere una qualche semplicità.

Le numerose eguaglianze logiche che si conoscono, e quelle che si possono trovare, permettono di seguire più vie per classificare i simboli di logica.

Esigerebbe poi uno studio più lungo la classificazione delle proposizioni di logica in primitive e derivate. Ma mi basti il richiamare l'attenzione degli studiosi su questi soggetti sommamente utili ed interessanti.